Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

RM
2022-2023

1 Fonctions exponentielle et trigonométrique

1.1 Fonction exponentielle

Définition 1 : On défini la fonction exponentielle complexe par la fonction $\exp : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ noté $\exp(z)$ ou e^z.

Remarque 2 : Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{C}$ car la série entière $\sum \frac{1}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infinie.

Proposition 3 : La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$ et admet pour dérivée e^z en tout point $z \in \mathbb{C}$. On a donc que exp est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4 : Soient $z, \zeta \in \mathbb{C}$. Alors :
- $e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta$.
- $e^z \neq 0$.
  $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.
  $|e^z| = e^{Re(z)}$.
  $|e^z| = 1$ si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$.

Théorème 5 : La fonction exponentielle complexe induit un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Ce morphisme est continu, surjectif, mais non injectif de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 6 : L'application $t \mapsto e^{it}$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ est un morphisme de groupes, surjectifs et non injectif. Son noyau est de la forme $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 7 : La restriction de la fonction exponentielle complexe à $\mathbb{R}$ coïncide avec la fonction exponentielle réelle classique, définie comme solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8 : La fonction exponentielle réelle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, convexe avec pour limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

1.2 Fonctions circulaires

Définition 9 : On appelle cosinus et sinus les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $\cos(t) = Re(e^{it})$ et $\sin(t) = Im(e^{it})$.

Proposition 10 : Soit $t \in \mathbb{R}$. On alors $e^{it} = \cos t + \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}$.
On a de plus $\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposition 11 : sin est une application impaire et cos une application paire, toutes deux de période 2π. Elles sont infiniment dérivable avec $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$.

Proposition (Formule d'Euler) 12 : On a les formule $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Proposition 13 : On a pour tout t réel que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Définition 14 : On définit alors les applications cosinus et sinus complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Remarque 15 : Ces fonctions vérifie les mêmes propriétés que leur homologues réels.

1.3 Fonctions hyperboliques

Définition 16 : On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexe par pour $z \in \mathbb{C}$:

$$ch(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad sh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposition 17 : On a $ch(iz) = \cos z$ et $sh(iz) = i \sin z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 18 : Les fonctions ch et sh sont respectivement pair et impair. De plus, on a $ch^2 - sh^2 = 1$, $ch' = sh$ et $sh' = ch$.

2 Fonction logarithme

2.1 Logarithme népérien réelle

Définition 19 : On définit la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln = \exp_{|\mathbb{R}}^{-1}$.

Proposition 20 : On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Théorème 21 : La fonction ln est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 1/x \\ y(1) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 22 : La fonction ln a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.

Définition 23 : Soit $t > 0$ et soit $z \in \mathbb{C}$. On définit alors $t^z = e^{z \ln(t)}$.

Remarque 24 : Cette fonction coïncide sur $\mathbb{Z}$ avec la définition connue de t^n.

Proposition 25 : Soit $\alpha > 0$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +_infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

Application 26 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) > 0$. Alors la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1} e^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2.2 Logarithme complexe

Définition 27 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue de l'argument sur U toute application continue $\theta : U \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ soit un argument de z.

Exemple 28 : Soit $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On appelle détermination principale de l'argument sur Ω_0, et on note $Arg(z)$, pour $z \in \Omega_0$, l'unique argument de z tel que $Arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

Remarque 29 : La détermination principale de l'argument est une détermination continue de l'argument sur Ω_0.

Définition 30 : *i)* Si $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle logarithme de z tout nombre complexe ζ tel que $e^\zeta = z$.

ii) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une détermination continue du logarithme sur U est une application continue $l : U \to \mathbb{C}$ telle que $e^{l(z)} = z$ pour tout $z \in U$.

Proposition 31 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Les déterminations continues du logarithme sur U sont les fonctions sur U de la forme $z \mapsto \ln|z| + i\theta(z)$ où θ est une détermination continue de l'argument sur U.
Si U est connexe, alors deux déterminations continue du logarithme diffèrent d'un facteur $2i\pi\mathbb{Z}$.

Exemple 32 : On appelle détermination principale du logarithme sur Ω_0 la fonction $z \mapsto \ln|z| + iArg(z)$. On la note $Log(z)$.

Théorème 33 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.

i) Toute détermination continue du logarithme sur U est une primitive de $1/z$ sur U.

Si $1/z$ admet une primitive sur U, il existe des déterminations continues du logarithme.

Remarque 34 : Il n'existe aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. En faite , on doit toujours "retirer" une droite partant de l'origine sur $\mathbb{C}^*$ pour avoir une détermination continue du logarithme. Car sinon, l'application n'est pas vraiment définie, car on ne sait pas quel argument choisir pour un nombre $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 35 : Si $|z| < 1$, on a $Log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

3 Étude de la fonction gamma d'Euler

3.1 Définition et prolongement

Définition 36 : Soit $\omega = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$. On définit alors la fonction Γ sur ω par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Remarque 37 : La fonction Γ est bien définie sur ω d'après l'application 26.

Proposition 38 : La fonction Γ est holomorphe sur ω.

Proposition 39 : Pour tout $z \in \omega$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$.

Développement 40 : La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles $-n, n \in \mathbb{N}$.	**Dev 1**

Remarque 41 : On peut avoir l'intuition de ce tel prolongement en remarquant d'après la proposition 39 que $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$.

3.2 Formules de la fonction Gamma

Proposition (Formule d'Euler) 42 : Pour $z \in \omega$, on a $\Gamma(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

Définition 43 : On appelle constante d'Euler noté γ le nombre $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Proposition (Formule de Weierstrass) 44 : On a pour tout $z \in \omega$, $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right]$.

Proposition (Formule de duplication) 45 : On a pour tout $z \in \Omega$, $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$.

Proposition (Formule des compléments) 46 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(z) < 1$, on a $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

Remarque 47 : En utilisant le prolongement de Γ, cette formule reste vrai sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$.

Proposition (Formule de Stirling généralisé) 48 : On a que $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi t}(t/e)^t$.

3.3 Tracé de Gamma sur $\mathbb{R}$

Proposition 49 : La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 50 : On a que $\Gamma(x)$ est équivalent en 0 à la fonction $1/x$. De plus, on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Remarque 51 : On peut alors donner l'allure de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$.

4 Une application à l'approximation du nombre pi

L'idée est de trouver une approximation de π en effectuant seulement des opérations usuels, c'est-à-dire seulement l'addition, multiplication et extraction de racine carré.

Développement 52 : Pour tout n entier tel que $n \geq 2$, on note u_n l'aire d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O de coordonnées $(0,0)$ et de rayon 1 dans le repère euclidien usuel. Alors la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge linéairement vers π et nous donne une méthode d'approximation de π.

Dev 2

Remarque (A prendre avec des pincettes, c'est fait maison) 53 : Historiquement, Archimède à utiliser plutôt le périmètre du polygone construit noté donc p_n et le périmètre du polygone à l'extérieur du cercle (construit de sorte que ses côtés soient tangent au cercle). On peut alors montrer que ses deux suites convergent vers π. Comme on peut trouver des formules de récurrences pour p_n et P_n dépendant chacune des termes précédents (on a précisément $p_{n+1} = \sqrt{P_{n+1}p_n}$ et $P_{n+1} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$), il suffit alors de calculer chaque terme pour construire les valeurs de p_n et P_n sans connaître π ou les valeurs des cosinus et sinus en 1 point. On prends alors n suffisamment grands et on obtient une approximation de π.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Analyse complexe pour la licence 3 Tauvel
3. Analyse pour l'agrégation ZQ
4. Objectif agrégation Beck